Exercice 1 : (2,5 pts)

1) a - Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$\mathbf{x}^2 + 4\mathbf{x} - 5 = 0$$

b – Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'équation suivante :

$$\ln(\mathbf{x}^2 + 5) = \ln(\mathbf{x} + 2) + \ln 2\mathbf{x}$$

2) Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'inéquation suivante :

$$\ln \mathbf{x} + \ln(\mathbf{x} + 1) \geq \ln(\mathbf{x}^2 + 1)$$

Exercice 2 : (3 pts)

On considère la suite (U_n) définie par :

$$\mathbf{U}_{\mathbf{n}+1} = \frac{\mathbf{U}_\mathbf{n}}{5 + 8\mathbf{U}_\mathbf{n}} \quad \forall \mathbf{n} \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0 = 1$$

1) Montrer que : $\mathbf{U}_\mathbf{n} > 0 \quad \forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}$

2) On considère la suite (V_n) définie par :

$$\mathbf{V}_\mathbf{n} = \frac{1}{\mathbf{U}_\mathbf{n}} + 2 \quad \forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}$$

a – Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison 5 puis écrire $\mathbf{V}_\mathbf{n}$ en fonction de n.

b – Montrer que $\mathbf{U}_\mathbf{n} = \dfrac{1}{3 \times 5^\mathbf{n} - 2} \quad \forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}$ et en déduire $\lim \mathbf{U}_\mathbf{n}$

Exercice 3 : (5 pts)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\mathbf{Z}^2 - 18\mathbf{Z} + 82 = 0$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathbf{O};\vec{\mathbf{u}};\vec{\mathbf{v}})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $\mathbf{a} = 9 + \mathbf{i}$, $\mathbf{b} = 9 - \mathbf{i}$, $\mathbf{c} = 11 - \mathbf{i}$

a – Montrer que : $\dfrac{\mathbf{c} - \mathbf{b}}{\mathbf{a} - \mathbf{b}} = -\mathbf{i}$ puis en déduire que le triangle ABC est isocèle et rectangle en B.

b – Ecrire $4(1 - i)$ sous forme trigonométrique

c – Montrer que : $(\mathbf{c} - \mathbf{a})(\mathbf{c} - \mathbf{b}) = 4(1 - \mathbf{i})$ puis en déduire que $\mathbf{AC} \times \mathbf{BC} = 4\sqrt{2}$

d – Soit z l'affixe de point M du plan et z′ l'affixe du point M′ image du point M par la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{3\pi}{2}$. Montrer que $\mathbf{z}' = -\mathbf{i}\mathbf{z} + 10 + 8\mathbf{i}$ puis vérifier que l'affixe du point C′ image du point C par la rotation R est 9 – 3i

Problème : : (9,5 pts)

Partie I :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (1 - \mathbf{x})\mathbf{e}^\mathbf{x} - 1$$

1) a – Montrer que $\mathbf{g}'(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}\mathbf{e}^\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$

b – Montrer que g est décroissante sur $[0,+\infty[$ et croissante sur $]-\infty;0]$ puis vérifier que g(0) = 0

2) En déduire que $g(x) \leq 0 \quad \forall \in \mathbb{R}$

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (2 - \mathbf{x})\mathbf{e}^\mathbf{x} - \mathbf{x}$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(\mathbf{O};\vec{\mathbf{i}};\vec{\mathbf{j}})$ (unité : 1 cm)

1) a – Montrer que $\lim\limits_{\mathbf{x}\to+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\infty$

b – Montrer que $\lim\limits_{\mathbf{x}\to+\infty} \dfrac{\mathbf{f}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}} = -\infty$ puis en déduire que (C_f) admet au voisinage de + ∞ une branche parabolique de direction à déterminer.

2) a – Montrer que $\lim\limits_{\mathbf{x}\to-\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = +\infty$ et calculer $\lim\limits_{\mathbf{x}\to-\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + x$ (On sait que $\lim\limits_{\mathbf{x}\to-\infty} xe^\mathbf{x} = 0$)

b – Montrer que la droite (D) : y = – x est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de – ∞

3) a – Montrer que $\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$

b – Interpréter géométriquement le résultat f ′(0) = 0

c – Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau des variations de f.

4) Montrer que l'équation f(x)=0 admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $\dfrac{3}{2} < \alpha < 2$ (on admet $\mathbf{e}^{\frac{3}{2}} > 3$)

5) a-Résoudre f(x) + x = 0 et en déduire que (C_f) et (D) Se coupent en un point A(2 ;–2).

b – Etudier le signe de f(x) + x sur $\mathbb{R}$.

c – En déduire que (C_f) est au-dessus de (D) sur $]-\infty;2[$ et en dessous de (D) sur $]2,+\infty[$

6) a – Montrer que (C_f) possède un seul point d'inflexion de cordonnées (0 ; 2)

b - Construire la droite (D) et la courbe (C_f)

7) a – A l'aide d'une intégration par parties montrer que : $\displaystyle\int_{-1}^{0} (2 - \mathbf{x})\mathbf{e}^\mathbf{x}\mathbf{dx} = 3 - \frac{4}{\mathbf{e}}$

b – En déduire en cm² l'aire du domaine limité par (C_f), la droite (D) et les droites d'équations x = 0 et x = – 1.